

Gruppenübung 12

Diffeomorphismen

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : U \rightarrow V$ heißt *globaler Diffeomorphismus* wenn

- f eine inverse Funktion $f^{-1} : V \rightarrow U$ hat und
- sowohl f als auch f^{-1} unendlich oft differenzierbar sind.

Um zu überprüfen ob eine Abbildung ein globaler Diffeomorphismus ist, ist folgende Charakterisierung hilfreich [1]:

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Diffeomorphismus wenn

- f unendlich oft differenzierbar ist,
- die Jacobimatrix von f an allen Stellen $x \in \mathbb{R}^n$ invertierbar ist und
- $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|f(x)\| = \infty$.

Aufgabe 1 Sei $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\phi(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} (1 + x_2^2 x_1^2) \arctan(x_1) \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Jacobimatrix der Abbildung. Handelt es sich um einen globalen Diffeomorphismus?

Aufgabe 2 Sei $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ definiert durch

$$\phi(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} \exp(x_1) \cos(x_2) \\ \exp(x_1) \sin(x_2) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Jacobimatrix und deren Inverse. Handelt es sich um einen globalen Diffeomorphismus?

Aufgabe 3 Sei $\phi : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\phi(r, \theta) := \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Jacobimatrix der Abbildung. Begründen Sie, warum es sich um keinen globalen Diffeomorphismus handelt. Was muss man ändern um einen globalen Diffeomorphismus zu erhalten?

Aufgabe 4 Sei $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein globaler Diffeomorphismus und

$$\dot{x} = f(x)$$

eine Differentialgleichung mit differenzierbarem Vektorfeld f . Wir definieren neue Koordinaten durch $z = \phi(x)$. Wie lautet die Differentialgleichung in z -Koordinaten?

Aufgabe 5 Sei $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein globaler Diffeomorphismus. Zeigen Sie, dass

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=\phi^{-1}(z)} \cdot \left. \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial z} \right|_z = I.$$

Aufgabe 6 Betrachten Sie das System

$$\dot{x}_1 = -x_1 + \exp(x_2)u$$

$$\dot{x}_2 = x_1 x_2 + u$$

$$\dot{x}_3 = x_2$$

$$y = x_3.$$

Bestimmen Sie den relativen Grad, transformieren Sie das System in eingangsnormalisierte Byrnes-Isidori-Normalform.

Aufgabe 7 Gegeben sei das System

$$\dot{x}_1 = \exp(x_2)u$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2^2 + \exp(x_2)u$$

$$\dot{x}_3 = x_1 - x_2$$

$$y = x_3.$$

Bestimmen Sie eine Transformation in Byrnes-Isidori-Normalform, prüfen Sie ob die Transformation ein lokaler oder ein globaler Diffeomorphismus ist. Bestimmen Sie eine exakte E/A-Linearisierung.

Literatur

- [1] Wu, Felix and Desoer, Charles, Global inverse function theorem, IEEE Transactions on Circuit Theory, 1972, Volume 19, Number 2, 199–201.